

Evolución de promedios

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

Evolución temporal de un escalar.

Para $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = - \left\langle \frac{d}{dx} V(x) \right\rangle \quad \text{Ojo} : \left\langle \frac{d}{dx} V(x) \right\rangle \neq \frac{d}{dx} V(\langle x \rangle)$$

Conservación local de probabilidad

- $\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ es una densidad de probabilidad
- La probabilidad $d\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$ de encontrar a la partícula al tiempo t en un volumen infinitesimal d^3r ubicado en el punto $\mathbf{r}$ es

$$d\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) d^3r$$

- Mostramos que la integral de $\rho(\mathbf{r}, t)$ sobre todo el espacio se mantiene constante pero esto no significa que $\rho(\mathbf{r}, t)$ deba ser constante en el tiempo.
- Análogo a una densidad de cargas de un sistema cerrado.
- En el caso de cargas tenemos la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0$$

- ¿Podemos encontrar algo similar para nuestro caso?
- Escribir la ecuación de Schrödinger en la base de posición para un potencial escalar y también su complejo conjugado.
- Multiplicar la ecuación para ψ por ψ^* y la de ψ^* por ψ
- Al sumarlas obtenemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)] = -\frac{\hbar^2}{2m} [\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*]$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*]$$

- Si definimos

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*] \\ &= \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left\{ \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \psi \right) \right\} \end{aligned}$$

Conservación
Global

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \text{cte}$$

Conservación
local



$$\text{div } \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} [(\nabla \psi^*) \cdot (\nabla \psi) + \psi^* (\nabla^2 \psi) - (\nabla \psi) \cdot (\nabla \psi^*) - \psi (\nabla^2 \psi^*)]$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*]$$

(D-18)

Ejemplo, onda plana

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t)$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\vec{r}, t) = 0$$

$$\psi(\vec{r}, t) = f(\vec{r}) T(t)$$

$$T \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 f + f i\hbar T' = 0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 f}{f} = \frac{i T'}{T} = \omega$$

$$T' = -i\omega T \Rightarrow T(t) = C e^{-i\omega t}$$

$$\nabla^2 f = -\frac{2m\omega}{\hbar} f \quad (\text{Ecuación de Helmholtz})$$

$$\nabla^2 g + k^2 g = 0 \quad k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$$

$$f(\vec{r}) = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar\omega$$

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

es solución $\forall \vec{k}$ y ω que cumplen $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar\omega$

$$g = |A|^2, \quad \vec{J} = |A|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{2m}$$

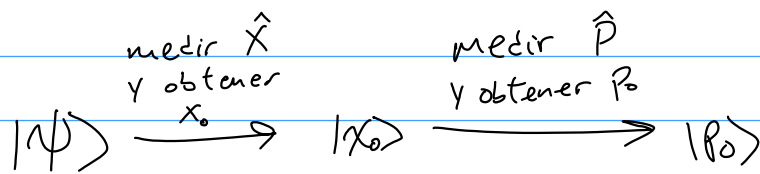
Esta onda plana no se puede normalizar y no es una solución física pero se pueden crear superposiciones de ondas planas y obtener paquetes de onda

$$\psi_{pk}(\vec{r}, t) = e^{-\frac{x^2}{2L^2}} e^{ikx}$$



Variables conjugadas y medidas compatibles

Medidas incompatibles.



$$\psi(x) \longrightarrow \delta(x-x_0) \longrightarrow \langle x|p_0\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^{1/2}} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x}$$

$$\psi(p) \longrightarrow \langle p|x\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^{1/2}} e^{-\frac{i}{\hbar} p x_0} \longrightarrow \delta(p-p_0)$$

Al medir $\hat{P}$ se borra la información que tenemos de $\hat{X}$.

localizada
deslocalizada